CPI2 (S4) (2020 – 2021)

Calcul des probabilités
Chapitre3

Pr : M. O. Aboutafail

Chapitre 3 :

Variables aléatoires : généralités

1. Variable aléatoire : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une variable aléatoire est une application X dont la valeur dépend du résultat obtenu lors de l'expérience aléatoire. Une variable aléatoire est donc une application

$$X: \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & X(\Omega) \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array}$$

I. Variable aléatoire et loi de probabilité

<u>1. Variable aléatoire :</u> Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une variable aléatoire est une application X dont la valeur dépend du résultat obtenu lors de l'expérience aléatoire. Une variable aléatoire est donc une application

$$X: \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & X(\Omega) \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array}$$

Exemple

1) On lance deux dés et on pose $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$. *L'application*

$$X: \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & X(\Omega) \\ \omega = (a, b) & \longmapsto & a + b \end{array}$$

est la variable aléatoire qui relie chaque résultat de l'expérience avec la somme des chifres obtenues.
Notons que $X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Exemple

2) On lance une fléchette contre une cible et on pose $\Omega = \mathbb{R}^2$. La distance euclidienne du point d'atteinte au centre de la cible est une variable aléatoire sur Ω.

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & X(\Omega) = [0, r] \\ \omega = (a, b) & \longmapsto & \sqrt{a^2 + b^2} \end{array}$$

où r est le rayon de la cible.

I. Variable aléatoire et loi de probabilité

Remarque

$X(\Omega)$ est un espace connu dans la pratique et il est simple à manipuler si on le compare avec Ω qui est un espace souvent difficile à décrire (espace abstrait, lourd). Donc, il est naturel de s'intéresser aux chances de réalisation des valeurs de X plutôt que de travailler sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (c'est à dire d'étudier les chances de réalisation des résultats de l'expérience).

Remarque

$X(\Omega)$ est un espace connu dans la pratique et il est simple à manipuler si on le compare avec Ω qui est un espace souvent difficile à décrire (espace abstrait, lourd). Donc, il est naturel de s'intéresser aux chances de réalisation des valeurs de X plutôt que de travailler sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (c'est à dire d'étudier les chances de réalisation des résultats de l'expérience).

Remarque

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $X : \Omega \longrightarrow X(\Omega)$ une variable aléatoire sur Ω.
Soit $B \subset X(\Omega)$. Pour que $\mathbb{P}(X^{-1}(B))$ ait un sens, il est nécessaire que $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, où $X^{-1}(B) = \{\omega, X(\omega) \in B\}$ est l'image réciproque de B par la variable aléatoire X qu'on peut la notée par $\{X \in B\}$.

Proposition

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire sur Ω.
L'ensemble $\mathcal{F}$ des parties B de $X(\Omega)$ telles que $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ forme une tribu de $X(\Omega)$.

Proposition

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire sur Ω.
L'ensemble $\mathcal{F}$ des parties B de $X(\Omega)$ telles que $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ forme une tribu de $X(\Omega)$.

Définition

Une variable aléatoire est une application

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (X(\Omega), \mathcal{F})$$

telle que $\forall B \in \mathcal{F}$, on a $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

2. Loi de probabilité :

Théorème

L'application $\mathbb{P}_X$ définie pour $B \in \mathcal{F}$ par :

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

définit une probabilité sur la tribu $\mathcal{F}$.

2. Loi de probabilité :

Théorème

L'application $\mathbb{P}_X$ définie pour $B \in \mathcal{F}$ par :

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

définit une probabilité sur la tribu $\mathcal{F}$.

Définition

La probabilité $\mathbb{P}_X$ définie dans le théorème précédent est appelé loi de la variable aléatoire X (ou distribution de X). C'est la mesure image de la probabilité $\mathbb{P}$ par la variable aléatoire X.

Remarque

- *La probabilité* $\mathbb{P}_X$ *est plus facile à caractériser que la probabilité* $\mathbb{P}$, *car* $X(\Omega)$ *est un ensemble connu dans la pratique (topologiquement) alors que* Ω *est un ensemble abstrait.*
- *En général,* $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(X(\Omega))$, *même si on a* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. *Cela justifier le fait qu'une probabilité soit définie sur une tribu qui peut être strictement plus petites que* $\mathcal{P}(\Omega)$.

Dans la suite de ce cours nous allons nous intéresser à la classe des variables aléatoires réelles, c'est à dire les variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ ou dans un ensemble $F \subset \mathbb{R}$ fini ou dénombrable.
Les variables aléatoires réelles au programme de ce cours sont de deux types :

- *Les variables discrètes, lorsque $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.*
- *Les variables continues, lorsque F_X (la fonction de répartition) est continue et peut s'écrire sous la forme $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$ où f est une fonction positive, intégrable sur $\mathbb{R}$ (par exemple, discontinue sur un ensemble fini de points) et d'intégrale sur $\mathbb{R}$ égale à 1 (densité totale égale 1). La fontion f est appelée densité de probabililté.*

3. Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelles : Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$, alors la loi de X est une probabilité définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ et vérifie :

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B); \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Cette loi est caractérisée par la fonction suivante (fonction de répartition).

3. Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelles : Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$, alors la loi de X est une probabilité définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ et vérifie :

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B); \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Cette loi est caractérisée par la fonction suivante (fonction de répartition).

Définition

Soient X une variable aléatoire réelle et X sa loi de probabilité.
On appelle fonction de répartition de X la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, x])) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Exemple

Si X est nulle presque surment, alors sa loi $\mathbb{P}_X = \delta_0$ (mesure de Dirac en 0) et sa fonction de répartition est exactement la fonction d'Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle possède les propriétés suivantes :

Proposition

1. F_X est une fonction croissante.
2. F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
4. F_X a des limites à gauche en tout point, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x^-) = \lim_{y \longrightarrow x^-} F_X(y) = F_X(x) - \mathbb{P}(X = x).$$

5. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y$ on a $P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$.

Proposition

Soient X une variable aléatoire réelle et $\mathbb{P}_X$ sa loi, alors
la fonction de répartition de X est continue en x si, et seulement si, $\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x) = 0$.

Proposition

Soient X une variable aléatoire réelle et $\mathbb{P}_X$ sa loi, alors la fonction de répartition de X est continue en x si, et seulement si, $\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x) = 0$.

Théorème

Toute fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ telle que

- F est croissante.
- $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 1$.
- F est continue à droite en tout point.

est la fonction de répartition d'une unique probabilité sur $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borilienne.

Dans tout ce paragraphe, l'espace Ω est fini ou dénombrable et donc l'espace probabilisé considéré sera $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
Notons que si $X : \Omega \longrightarrow X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ est une application, alors pour tout $x \in X(\Omega)$ on a $X^{-1}(x) \in \mathcal{P}(\Omega)$.
Ainsi, on a la définition suivante :

II. Variables aléatoires discrètes (réelle)

Dans tout ce paragraphe, l'espace Ω est fini ou dénombrable et donc l'espace probabilisé considéré sera $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
Notons que si $X : \Omega \longrightarrow X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ est une application, alors pour tout $x \in X(\Omega)$ on a $X^{-1}(x) \in \mathcal{P}(\Omega)$.
Ainsi, on a la définition suivante :

Définition

On appelle variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application $X : \Omega \longrightarrow X(\Omega)$.
Notons que $X(\Omega)$ est nécessairement fini ou dénombrable.

Exemple

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules noires. On extrait successivement avec remise 2 boules de l'ume (on choisit comme univers $\Omega = \{R_1; R_2; R_3; N_1; N_2; N_3; N_4\}^2$ *et comme tribu* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$*). On mise au départ* $10Dh$*, et on gagne* $8Dh$ *par boule rouge obtenue. Soit* X *la v.a.r. prenant pour valeur le gain final.*
X *est une v.a.r. discrète et on a :* $X(\Omega) = \{-10; -2; +6\}$.

1. Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète :

Proposition

La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans un espace fini ou dénombrable $X(\Omega)$ est caractérisée par :

$$\{(x_i, \mathbb{P}_X(x_i)), x_i \in X(\Omega)\}, \text{ avec } \mathbb{P}_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i).$$

1. Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète :

Proposition

La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans un espace fini ou dénombrable $X(\Omega)$ est caractérisée par :

$$\{(x_i, \mathbb{P}_X(x_i)), x_i \in X(\Omega)\}, \text{ avec } \mathbb{P}_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i).$$

Remarque

- *Si X ne prend qu'un petit nombre de valeurs, alors la loi de probabilité de X est généralement présentée dans un tableau.*
- *Pour représenter graphiquement une loi d'une variable aléatoire discrète, on utilise un diagramme "en bâton". Les valeurs x_i sont placées en abscisse et les images $\mathbb{P}_X(x_i)$ en ordonnée.*

Exemple

Dans le cas d'équiprobabilité, une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \{0, 1, 2, ..., n\}$ *a pour loi de probabilité :* $\{(k, \frac{1}{n}), 1 \leq k \leq n\}$

Exemple

Dans le cas d'équiprobabilité, une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \{0, 1, 2, ..., n\}$ *a pour loi de probabilité :* $\{(k, \frac{1}{n}), 1 \leq k \leq n\}$

Exemple

La loi de probabilité uniforme associée à un lancer de dé est représentée dans le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6	
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Exemple

Dans le cas d'équiprobabilité, une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \{0, 1, 2, ..., n\}$ *a pour loi de probabilité :* $\{(k, \frac{1}{n}), 1 \leq k \leq n\}$

Exemple

La loi de probabilité uniforme associée à un lancer de dé est représentée dans le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6	
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Exemple

Loi de probabilité d'une variable certain. Il s'agit d'une variable aléatoire qui est constante (prend la même valeur b quel que soit le résultat de l'épreuve) : $\mathbb{P}_X(x) = b$ *pour tout* $x \in X(\Omega)$.
Dans ce cas on parle de loi de Dirac centrée en b associée à cette variable certaine (notée par δ_b*).*

Exemple

Loi d'une variable indicatrice. Soit $A \in \mathcal{A}$ un événement quelconque, on appelle variable aléatoire indicatrice de l'événement A, la variable aléatoire définie par :

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \omega \in A \\ 0 & si\ \omega \in \overline{A} \end{cases}$$

et notée par $X = 1_A$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}\{\omega/\omega \in A\} = \mathbb{P}(A)$$
$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\{\omega/\omega \in \overline{A}\} = \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

2. Espérance mathématique :

Définition

Soit $X : \Omega \longrightarrow X(\Omega)$ une variable aléatoire (réelle) sur l'espace fini ou dénombrable Ω. On appelle espérance mathématique de X, la quantité, si elle existe :

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \times \mathbb{P}_X(x_i).$$

Plus précisement,

- Lorsque $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ on a $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \mathbb{P}_X(x_i)$.
- Lorsque $X(\Omega) = \{x_i, i \geq 1\}$ et lorsque la série $\sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \times \mathbb{P}_X(x_i)$ est absolument convergente, on a $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \times \mathbb{P}_X(x_i)$.

Remarque

- *Dans le cas où* $X(\Omega)$ *est fini,* $E(X)$ *est le barycentre de la famille de points pondérés* $(x_i, P_X(x_i))_{1 \leq i \leq n}$.
- *Dans le cas où* $X(\Omega)$ *est dénombrable, on ne peut pas exiger seulement la convergence de la série. On aura besoin d'exiger la convergence absolue (sommabilité) pour garantir que l'espérance de* X *est défini indépendamment de la façon dont on a numéroté* $X(\Omega)$.

Exemple

1) *Soit* $X : \Omega \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *de loi de probabilité uniforme :*

x_i	1	2	3	4	5	6	
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

alors $E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6}$.

Exemple

1) *Soit* $X : \Omega \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *de loi de probabilité uniforme :*

x_i	1	2	3	4	5	6	
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

alors $E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6}$.

2) *Dans le cas de la loi uniforme sur* $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, *on obtient* $E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ *et dans ce cas* $E(X)$ *coincide avec la moyenne arithmétique* $\overline{x}$ *des valeurs possibles de* X.

Exemple

3) *Soit* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ *une variable aléatoire de loi de probabilité* $\mathbb{P}_X(n) = \mathbb{P}(X = n) = e^{-2} \times \frac{2^n}{n!}$ *(loi de Poisson de paramètre 2). La série* $\sum_{n\geq 0} n \times \mathbb{P}_X(n)$ *est absolument convergente (règle d'Alembert), donc* $E(X)$ *existe et on a :*

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \times \mathbb{P}_X(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \times e^{-2} \times \frac{2^n}{n!} \\ &= e^{-2} \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} = e^{-2} \times 2 \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \\ &= 2e^{-2} \times e^2 = 2. \end{aligned}$$

Exemple

4) *Soit* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *une variable aléatoire de loi* $P_X(n) = \frac{6}{\pi^2 n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Puisque la série $\sum_{n \geq 1} n \times \mathbb{P}_X(n) = \sum_{n \geq 1} \frac{6}{\pi^2 n}$ *est divergente (par comparaison), alors* X *n'a pas d'espérance.*

Exemple

4) *Soit* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *une variable aléatoire de loi* $P_X(n) = \frac{6}{\pi^2 n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Puisque la série $\sum_{n\geq 1} n \times \mathbb{P}_X(n) = \sum_{n\geq 1} \frac{6}{\pi^2 n}$ *est divergente (par comparaison), alors* X *n'a pas d'espérance.*

5) *Pour une variable aléatoire indicatrice :*

$$E(X) = 0 \times \mathbb{P}_X(0) + \mathbb{P}_X(1) = \mathbb{P}(A).$$

Définition

On appelle variable aléatoire intégrable, une variable aléatoire X qui admet une espérance, c'est à dire telle que la série $\sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \times \mathbb{P}_X(x_i)$ est absolument convergente.

On note par $L^1(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}) := L^1$ l'ensemble de toutes les variables aléatoires intégrables.

Définition

On appelle variable aléatoire intégrable, une variable aléatoire X qui admet une espérance, c'est à dire telle que la série $\sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \times \mathbb{P}_X(x_i)$ est absolument convergente.

On note par $L^1(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}) := L^1$ l'ensemble de toutes les variables aléatoires intégrables.

Théorème

Soit Ω un espace fini ou dénombrable. Si $X \in L^1$, alors :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Proposition

Soient Ω un espace fini ou dénombrable et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω. L'ensemble L^1 est un espace vectoriel, et l'espérance est linéaire sur L^1 :

$$\forall X, Y \in L^1, \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ on a } E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

Propriétés

Soient Ω un ensemble fini ou dénombrable et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω.

1. Si $X(\Omega) = a$ ($a \in \mathbb{R}$) pour tout $\omega \in \Omega$, alors $E(X) = a$.
2. $X \in L^1 \iff |X| \in L^1$, et dans ce cas $|E(X)| \leq E(|X|)$.
3. Si $X \geq 0$ et $X \in L^1$ alors $E(X) \geq 0$ (l'espérance est positive).
4. Si $X, Y \in L^1$ telle que $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.
5. Si X est telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $|X(\omega)| \leq a$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors $X \in L^1$
   (L^1 contient les variables aléatoires bornées).

Propriétés

Soient Ω un ensemble fini ou dénombrable et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω.

1. Si Ω est fini, alors L^1 contient toutes les variables aléatoires définissent sur Ω.
2. Si g est une fonction continue (continue par morceaux) définie sur un intervalle J contenant $X(\Omega)$, alors :

$$E(g(X)) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} g(x_i) \times \mathbb{P}_X(x_i)$$

sous réserve de convergence absolue. Ce dernier résultat est appelé "**propriété de transfert**".

Proposition

Soient Ω un espace fini ou dénombrable et X une variable aléatoire sur Ω. Si Ω possède un maximum et un minimum, alors $E(X)$ existe et :

$$\min\{X(\Omega)\} \leq E(X) \leq \max\{X(\Omega)\}.$$

3. Variance et écart-type :

Définition

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que la variable aléatoire X admet un moment d'ordre p si la variable aléatoire $X^p \in L^1$, et d'aprés la propriété de transfert, on a :

$$E(X^p) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i^p \times \mathbb{P}_X(x_i).$$

3. Variance et écart-type :

Définition

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que la variable aléatoire X admet un moment d'ordre p si la variable aléatoire $X^p \in L^1$, et d'aprés la propriété de transfert, on a :

$$E(X^p) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i^p \times \mathbb{P}_X(x_i).$$

Notation : On note par L^p l'ensemble des variables aléatoires X telles que X^p soit intégrable ($\in L^1$). En particulier, L^2 est l'ensemble des variables aléatoires de carré intégrable.

Remarque

- *Si* $X(\Omega)$ *est fini, alors* X *possède des moments de tout ordre.*
- *Si* $X(\Omega)$ *est dénombrable, l'existence du moment d'ordre* p *impose par définition la convergence absolue de la série* $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^p \times \mathbb{P}_X(x_i)$.

Remarque

- *Si* $X(\Omega)$ *est fini, alors* X *possède des moments de tout ordre.*
- *Si* $X(\Omega)$ *est dénombrable, l'existence du moment d'ordre* p *impose par définition la convergence absolue de la série* $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i^p \times \mathbb{P}_X(x_i)$.

Propriété

Si X possède un moment d'ordre p, alors les moments d'ordre $k \leq p$ de X existent aussi.

Remarque

- *Si $X(\Omega)$ est fini, alors X possède des moments de tout ordre.*
- *Si $X(\Omega)$ est dénombrable, l'existence du moment d'ordre p impose par définition la convergence absolue de la série $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i^p \times \mathbb{P}_X(x_i)$.*

Propriété

Si X possède un moment d'ordre p, alors les moments d'ordre $k \leq p$ de X existent aussi.

Proposition

L'ensemble L^2 est un sous espace vectoriel de l'espace L^1, et si $X \in L^2$ on a :

$$E(|X|) \leq \sqrt{E(X^2)}.$$

Définition

Soit $X \in L^2$. On appelle variance de X l'espérance de la variable $(X - E(X))^2$:

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - E(X))^2) \\ &= \sum_i (x_i - E(X))^2 \times \mathbb{P}_X(x_i). \end{aligned}$$

On l'appelle aussi moment centré d'ordre 2.

Définition

Lorsque la variable aléatoire X admet une variance, on appelle écart-type de X le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

L'écart-type est une grandeur qui mesure la moyenne de l'écart des valeurs de X à sa moyenne.

Définition

Lorsque la variable aléatoire X admet une variance, on appelle écart-type de X le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

L'écart-type est une grandeur qui mesure la moyenne de l'écart des valeurs de X à sa moyenne.

Théorème

Si X possède une variance, alors :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Propriété

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

1. $V(X) \geq 0$.
2. $V(X) = 0 \iff X$ est constante presque partout.
3. $V(X + a) = V(X)\,;\ \forall a \in \mathbb{R}$.
4. $V(aX) = a^2 V(X)\,;\ \forall a \in \mathbb{R}$.

Définition

- Toute variable aléatoire X vérifie $E(X) = 0$ est dite variable centré.
- Toute variable aléatoire X vérifie $V(X) = 1$ est dite variable réduite.

Définition

- Toute variable aléatoire X vérifie $E(X) = 0$ est dite variable centré.
- Toute variable aléatoire X vérifie $V(X) = 1$ est dite variable réduite.

Exemple

- *La variable $X - E(X)$ est une variable aléatoire centrée.*
- *La variable $\frac{1}{\sigma(X)} \times X$ est une variable aléatoire réduite.*

4. Fonction de répartition :

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète et $\mathbb{P}_X$ sa loi de probabilité. On appelle fonction de répartition de X la fonction

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & F_X(x) = \sum_{i \in X(\Omega); i \leq x} \mathbb{P}_X(\{i\}) \end{array}$$

avec $F_X(x) = 0$ s'il n'existe pas d'élément $i \in X(\Omega)$ tel que $i \leq 0$.

En particulier :

1) Si la variable aléatoire X est constante ($X(\omega) = a, \forall \omega \in \Omega$), alors $\mathbb{P}_X = \delta_a$ et $F_X = 1_{[a,+\infty[}$.

2) Si X est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, alors la loi de X est caractérisée par la suite :

$$p_n = \mathbb{P}_X(n) = \mathbb{P}(X = n)$$

et la fonction de répartition de X vaut donc

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sum_{i=0}^{n} p_i & \text{si } n \leq x < n+1 \end{cases}$$

On remarque que dans ce cas la fonction F_X est une fonction en escalier.

Exemple

Si on considère l'expérience aléatoire ***"lancer de dé"*** *qui suit une loi uniforme. Alors :*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 1 \\ E(x) \times \frac{1}{6} & si\ 1 \leq x < 6 \\ 1 & six \geq 6. \end{cases}$$

5. Fonction génératrice : Dans ce paragraphe nous considérons une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donc la loi de X est une probabilité sur $\mathbb{N}$ caractérisée par la suite de nombre $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.

5. Fonction génératrice : Dans ce paragraphe nous considérons une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donc la loi de X est une probabilité sur $\mathbb{N}$ caractérisée par la suite de nombre $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.

Définition

La fonction génératrice de la variable aléatoire X est la fonction définie par :

$$G_X : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & G_X(t) = \sum_{n\geq 0} p_n t^n \end{array}$$

c'est une fonction qui ne dépend que de la loi de X.

5. Fonction génératrice : Dans ce paragraphe nous considérons une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donc la loi de X est une probabilité sur $\mathbb{N}$ caractérisée par la suite de nombre $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.

Définition

La fonction génératrice de la variable aléatoire X est la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} G_X : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & G_X(t) = \sum_{n\geq 0} p_n t^n \end{array}$$

c'est une fonction qui ne dépend que de la loi de X.

Proposition

La fonction génératrice est continue sur $[0,1]$ et indéfiniment dérivable sur $[0,1[$.

Remarque

La dérivée $n^{\text{ième}}$ en 0 de la fonction G_X est $G_X^{(n)}(0) = p_n \times n!$. Ainsi, la fonction G_X caractérise les p_n.

Remarque

La dérivée $n^{\text{ième}}$ en 0 de la fonction G_X est $G_X^{(n)}(0) = p_n \times n!$. Ainsi, la fonction G_X caractérise les p_n.

Théorème

Soient $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit X une variable aléatoire a valeurs dans N, de fonction génératrice G_X. Alors :

$$X \in L^1 \Longleftrightarrow G_X \text{ est dérivable à gauche en } 1$$

et dans ce cas on a $E(X) = G_X'(1)$.

Proposition

La variable aléatoire $X(X-1)(X-2)...(X-p)$ est intégrable, si et seulement si G_X est $p+1$ fois dérivable à gauche en 1, et on a alors :

$$E(X(X-1)(X-2)...(X-p)) = G_X^{p+1}(1).$$

Proposition

La variable aléatoire $X(X-1)(X-2)...(X-p)$ est intégrable, si et seulement si G_X est $p+1$ fois dérivable à gauche en 1, et on a alors :

$$E(X(X-1)(X-2)...(X-p)) = G_X^{p+1}(1).$$

En particulier : $E(X(X-1)) = G_X''(1)$ et donc
$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$.

Proposition

La variable aléatoire $X(X-1)(X-2)...(X-p)$ est intégrable, si et seulement si G_X est $p+1$ fois dérivable à gauche en 1, et on a alors :

$$E(X(X-1)(X-2)...(X-p)) = G_X^{p+1}(1).$$

En particulier : $E(X(X-1)) = G_X''(1)$ et donc
$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$.
Note : $G_X^{p+1}(1) = \sum_n p_n \times n(n-1)...(n-p) = \sum_n p_n \times A_n^{p+1}$.

Proposition

La variable aléatoire $X(X-1)(X-2)...(X-p)$ est intégrable, si et seulement si G_X est $p+1$ fois dérivable à gauche en 1, et on a alors :

$$E(X(X-1)(X-2)...(X-p)) = G_X^{p+1}(1).$$

En particulier : $E(X(X-1)) = G_X''(1)$ et donc
$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$.
Note : $G_X^{p+1}(1) = \sum_n p_n \times n(n-1)...(n-p) = \sum_n p_n \times A_n^{p+1}$.

Remarque

Par fois, pour calculer l'espérance ou la variance d'une variable aléatoire, il peut étre plus simple d'utiliser les dérivées de G_X plutôt qu'un calcul direct.

6. Couple de variables aléatoires discrètes :

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Un couple de variables aléatoires V est un 2-uplet $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ où les X_i sont des variables aléatoires réelles ($sur(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$), c'est-à-dire une application :

$$\begin{array}{rccl} V: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \omega & \longmapsto & V(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \end{pmatrix} \end{array}.$$

V est appelé couple de variables aléatoires discretes si les X_i sont des variables aléatoires discrètes.

Exemple

On lance deux fois un dé équilibré. On modélise cette expérience en posant $\Omega = [\![1;6]\!]^2$ *et* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ *et* $\mathbb{P}$ *la probabilité uniforme. Soient* X *la variable aléatoire réelle égale à la somme des 2 lancers et* Y *la la variable aléatoire réelle égale au maximum des 2 lancers. L 'application*

$$\begin{array}{llll} V: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \omega = (\omega_1;\omega 2) & \longmapsto & V(\omega) = \left(\begin{array}{c} X(\omega) = \omega_1 + \omega_2 \\ Y(\omega) = max(\omega_1;\omega_2) \end{array} \right) \end{array}$$

est un couple de variables aléatoires discretes.

II. Variables aléatoires discrètes (réelle)

Exemple

On lance deux fois un dé équilibré. On modélise cette expérience en posant $\Omega = [\![1;6]\!]^2$ *et* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ *et* $\mathbb{P}$ *la probabilité uniforme. Soient* X *la variable aléatoire réelle égale à la somme des 2 lancers et* Y *la la variable aléatoire réelle égale au maximum des 2 lancers. L 'application*

$$V : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \omega = (\omega_1; \omega 2) & \longmapsto & V(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) = \omega_1 + \omega_2 \\ Y(\omega) = max(\omega_1; \omega_2) \end{pmatrix} \end{array}$$

est un couple de variables aléatoires discretes.

Remarque

D'après la définition on a $V(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$*, et comme le montre l'exemple précédent, cette inclusion peut être stricte. En effet, on a* $(3,6) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ *mais* $(3,6) \notin V(\Omega)$*.*

6.1. Loi conjointe d'un couple de variables aléatoires discrètes :

L'ensemble des valeurs possibles des variables X et Y peut s'écrire respectivement sous la forme $\{x_i\}_{i \in I}$ et $\{y_j\}_{j \in J}$, où I et J sont des ensembles d'indices inclus dans $\mathbb{N}$, pouvant d'ailleurs être $\mathbb{N}$ tout entier.

6.1. Loi conjointe d'un couple de variables aléatoires discrètes :

L'ensemble des valeurs possibles des variables X et Y peut s'écrire respectivement sous la forme $\{x_i\}_{i\in I}$ et $\{y_j\}_{j\in J}$, où I et J sont des ensembles d'indices inclus dans $\mathbb{N}$, pouvant d'ailleurs être $\mathbb{N}$ tout entier.

Définition

La loi de V, ou loi conjointe du couple $(X; Y)$, est la donnée de :

1. $V(\Omega)$, ensemble des valeurs possibles de V.
2. $\mathbb{P}\left[(X;Y)=(x_i;y_j)\right]=\mathbb{P}\left[(X=x_i)\cap(Y=y_j)\right]$ pour tous les couples $(x_i;y_j)$ de $V(\Omega)$.

On note $p_{i,j}=\mathbb{P}\left[(X=x_i)\cap(Y=y_j)\right]$.
Les $p_{i,j}$ sont des probabilités qui vérifient :

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}p_{i,j}=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}p_{i,j}=1.$$

En pratique, on donne la loi conjointe lorsque I et J sont finis, sous la forme d'un tableau à double entrée (Tableau de contingence) :

X \ Y	y_1	y_2	...	y_j	...	y_k	Total
x_1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	...	$p_{1,j}$	...	$p_{1,k}$	$p_{1,.}$
x_2	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$	...	$p_{2,j}$	...	$p_{2,k}$	$p_{2,.}$
...	...	...	...	...	...	...	...
x_i	$p_{i,1}$	$p_{i,2}$	...	$p_{i,j}$	...	$p_{i,k}$	$p_{i,.}$
...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	$p_{m,1}$	$p_{m,2}$	...	$p_{m,j}$	...	$p_{m,k}$	$p_{m,.}$
Total	$p_{.,1}$	$p_{.,2}$	...	$p_{.,j}$	...	$p_{.,k}$	1

Exemple

X \ Y	1	2	3	4	5	6	Total
2	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
3	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$
4	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	$\frac{3}{36}$
5	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	$\frac{4}{36}$
6	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{5}{36}$
7	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$
8	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$
9	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$
10	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$
11	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
12	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
Total	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

6.2. Loi marginale :

Définition

On appelle loi marginale de X du ouple (X, Y), la loi de probabilité de X

$$\begin{aligned} p_{i,.} = \mathbb{P}\left[(X = x_i)\right] &= \mathbb{P}\left[\bigcup_{j \in J (\text{union disjointe})} \left[(X = x_i) \cap (Y = Y_j)\right]\right] \\ &= \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}\left[(X = x_i) \cap (Y = Y_j)\right] = \sum_{j=1}^{k} p_{i,j}. \end{aligned}$$

De même on peut définir la loi marginale de X.

Exemple

Dans l'exemple précédent, la loi marginale de Y est donnée par :

$Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6	Total
$p_{.,j}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

Exemple

Dans l'exemple précédent, la loi marginale de Y est donnée par :

$Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6	Total
$p_{.,j}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

et la loi marginale de X est donnée par :

$X(\Omega)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
$p_{i,.}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

Application:

Un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire deux boules avec remises, et on note X *et* Y *les numéros obtenus. Soit* $Z = Sup(X, Y)$ *et* $\mathbb{P}$ *la probabilité uniforme sur* $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega))$*.*
Donner les lois des couples $(X; Y)$ *et* $(X; Z)$*.*

6.3. Indépendance de 2 variables aléatoires discrètes :

Définition

Deux variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes si :
$\forall (B_1 ; B_2) \in (\mathcal{B}_{\mathbb{R}})^2$,

$$\mathbb{P}\left[(X \in B_1) \cap (Y \in B_2)\right] = \mathbb{P}\left[(X \in B_1)\right] \times \mathbb{P}\left[(Y \in B_2)\right].$$

Lorsque X et Y sont discrètes, la définition est équivalente à :

$$\forall (i ; j) \in I \times J, \mathbb{P}\left[(X = x_i) \cap (Y = y_j)\right] = \mathbb{P}\left[(X = x_i)\right] \times \mathbb{P}\left[(Y = y_j)\right].$$

Autrement dit : $\forall (i ; j) \in I \times J, p_{i,j} = p_{i,.} \times p_{.,j}$.

Exemple

Les variables X et Z de l'application précédente ne sont pas indépendantes puisque

$$\mathbb{P}\left[(X=2)\cap(Z=3)\right]=\frac{1}{16} \textit{ et } \mathbb{P}\left[(X=2)\right]\times\mathbb{P}\left[(Z=3)=\right]=\frac{1}{16}\times\frac{1}{9}.$$

Alors que les variables X et Y sont indépendantes.

Théorème

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, admettant une espérance. Alors la variable aléatoire XY admet une espérance, et on a :

$$E(XY) = E(X) \times E(Y).$$

II. Variables aléatoires discrètes (réelle)

La réciproque du théorème précédent est fausse en général : l'égalité $E(XY) = E(X) \times E(Y)$ n'implique pas l'indépendance de X et Y comme le montre l'exemple suivant :

La réciproque du théorème précédent est fausse en général : l'égalité $E(XY) = E(X) \times E(Y)$ n'implique pas l'indépendance de X et Y comme le montre l'exemple suivant :

Exemple

Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-après :

$Y \backslash X$	*-1*	*0*	*1*
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

La réciproque du théorème précédent est fausse en général : l'égalité $E(XY) = E(X) \times E(Y)$ n'implique pas l'indépendance de X et Y comme le montre l'exemple suivant :

Exemple

Considérons le couple (X, Y) *dont la loi est définie par le tableau ci-après :*

$Y \backslash X$	*-1*	*0*	*1*
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

On a $E(X) = E(Y) = 0$ *et* $E(XY) = -1 \times \frac{2}{8} + 0 \times \frac{5}{8} + 1 \times \frac{2}{8} = 0$ *et cependant ces deux variables ne sont pas indépendantes.*

On rappel que $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel, où F est l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes. Soit F_1 l'ensemble des éléments de F qui possèdent une variance. F_1 est un sous-espace vectoriel de F inclus dans L^1 **(à titre d'exercice)**.

On rappel que $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel, où F est l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes. Soit F_1 l'ensemble des éléments de F qui possèdent une variance. F_1 est un sous-espace vectoriel de F inclus dans L^1 **(à titre d'exercice)**.

Définition

L 'application :

$$cov : \begin{array}{ccc} (F_1)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X;Y) & \longmapsto & E(XY) - E(X)E(Y) \end{array}$$

est bien définie, et est appelée **covariance** de X et Y.

Propriété :

Pour tout $(X, Y) \in F_1^2$, on a

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X, Y).$$

En particulier, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

Propriété :

Pour tout $(X, Y) \in F_1^2$, on a

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X, Y).$$

En particulier, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

Propriété :

Pour tout $(X, Y) \in F_1^2$, on a

$$cov(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right).$$

Définition

Soient X et Y deux éléments de F_1, de variance strictement positive. On appelle **coefficient de corrélation linéaire** le réel :

$$r(X;Y) = \frac{cov(X;Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Définition

Soient X et Y deux éléments de F_1, de variance strictement positive. On appelle **coefficient de corrélation linéaire** le réel :

$$r(X;Y) = \frac{cov(X;Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Propriété :

Pour tout $(X,Y) \in F_1^2$, on a

1. $|r(X;Y)| \leq 1$.
2. $r(X;Y) = r\left(X - E(X); Y - E(Y)\right)$.

6.4. Lois conditionnelles : On peut associer deux lois conditionnelles à la loi d'un couple, c'est-à-dire la loi d'une variable, l'autre ayant une valeur fixée (loi dans une ligne ou dans une colonne donnée). Par exemple, pour $Y = y_j$ fixé, la loi conditionnelle de X est définie par l'ensemble des valeurs possibles et les probabilités associées :

$$\mathbb{P}(X = x_i / Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i; Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)} = \frac{p_{i,j}}{p_{.,j}} = p_i^j.$$

On vérifie que c'est bien une loi de probabilité sur $X(\Omega) = \{x_i; i \in I\}$:

$$\sum_{i \in I} p_i^j = \frac{1}{p_{.,j}} \sum_{i \in I} p_{i,j} = 1.$$

Exemple

Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-après :

$Y \backslash X$	-2	0	2	$p_{.,j}$
-1	0,1	0,2	0,1	0,4
2	0,2	0,2	0,2	0,6
$p_{i,.}$	0,3	0,4	0,3	1

Exemple

Considérons le couple (X, Y) *dont la loi est définie par le tableau ci-après :*

$Y \backslash X$	-2	0	2	$p_{.,j}$
-1	0,1	0,2	0,1	0,4
2	0,2	0,2	0,2	0,6
$p_{i,.}$	0,3	0,4	0,3	1

La loi conditionnelle de X *pour* $Y = -1$ *figure dans le tableau ci-après :*

$X/Y = -1$	-2	0	2	
	$\frac{0{,}1}{0{,}4}$	$\frac{0{,}2}{0{,}4}$	$\frac{0{,}1}{0{,}4}$	1

Remarque

Dans le cas où les variables aléatoires sont indépendantes, bien entendu, les lois conditionnelles sont confondues avec les lois marginales ; par exemple :

$$\mathbb{P}(X = x_i / Y = y_j) = p_i^j = \frac{p_{i,.}p_{.,j}}{p_{.,j}} = p_{i,.}$$

6.5. Moments conditionnels : Aux lois conditionnelles sont associés des moments conditionnels, comme par exemple l'espérance conditionnelle de Y pour $X = x_i$ fixé, qui est l'espérance de la loi définie par les couples $\{(y_j; p_j^i); \in J\}$, soit :

$$E(Y/X = x_i) = \sum_{j \in J} y_j \mathbb{P}(Y = y_j/X = x_i) = \sum_{j \in J} y_j p_j^i.$$

6.5. Moments conditionnels : Aux lois conditionnelles sont associés des moments conditionnels, comme par exemple l'espérance conditionnelle de Y pour $X = x_i$ fixé, qui est l'espérance de la loi définie par les couples $\{(y_j; p_j^i); \in J\}$, soit :

$$E(Y/X = x_i) = \sum_{j \in J} y_j \mathbb{P}(Y = y_j/X = x_i) = \sum_{j \in J} y_j p_j^i.$$

On peut également calculer la variance conditionnelle :

$$\begin{aligned} V(Y/X = x_i) &= E\left([Y - E(Y/X = x_i)]^2/X = x_i\right) \\ &= E(Y^2/X = x_i) - (E(Y/X = x_i))^2 \\ &= \sum_{j \in J} p_j^i \left[y_j - E(Y/X = x_i)\right]^2 \end{aligned}$$

Exemple

Considérons le couple (X, Y) *dont la loi est définie par le tableau ci-après :*

$Y \backslash X$	-2	0	2	$p_{.,j}$
-1	0,1	0,2	0,1	0,4
2	0,2	0,2	0,2	0,6
$p_{i,.}$	0,3	0,4	0,3	1

Exemple

Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-après :

$Y \backslash X$	-2	0	2	$p_{.,j}$
-1	0,1	0,2	0,1	0,4
2	0,2	0,2	0,2	0,6
$p_{i,.}$	0,3	0,4	0,3	1

La loi conditionnelle de Y pour $X = 2$ est donnée par le tableau suivant :

$Y/X = 2$	-1	2	
	$\frac{0,1}{0,3}$	$\frac{0,2}{0,3}$	1

7.1. Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$:

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire a valeurs dans $\mathbb{N}$.

X est dite suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ si :

- $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
- $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{n}$.

On note $X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

Propriété

Si X est une variable aléatoire suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, alors :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Propriété

Si X est une variable aléatoire suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, alors :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Démonstration.

- $E(X) = \sum_{i=1}^{n} i \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$.
- On a $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} i^2 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$.
  Donc,
  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}$.

$\square$

7.2. Loi de Bernoulli :

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire a valeurs dans $\mathbb{N}$ et soit $p \in [0, 1]$. X est dite suit la loi de Bernoulli de paramètre p si :

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
- $P(X = 0) = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$.

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$ (ou $X \sim \mathcal{B}(1; p)$).

7.2. Loi de Bernoulli :

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire a valeurs dans $\mathbb{N}$ et soit $p \in [0, 1]$. X est dite suit la loi de Bernoulli de paramètre p si :

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
- $P(X = 0) = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$.

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$ (ou $X \sim \mathcal{B}(1; p)$).

Exemple

Si on s'intéresse à un événement A, appelé «succès» et si on note $p = \mathbb{P}(A)$, alors la variable aléatoire $X = 1_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

II. Variables aléatoires discrètes (réelle)
7. Lois usuelles discrètes

La loi de Bernoulli est utilisée lorsqu'une expérience aléatoire n'a que deux résultats possibles qualitatifs ou quantitatifs.

La loi de Bernoulli est utilisée lorsqu'une expérience aléatoire n'a que deux résultats possibles qualitatifs ou quantitatifs.

Propriété

Si X est une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors :

$$E(X) = p,\ V(X) = p(1-p) \text{ et } G_X(t) = 1 - p + p \cdot t.$$

La loi de Bernoulli est utilisée lorsqu'une expérience aléatoire n'a que deux résultats possibles qualitatifs ou quantitatifs.

Propriété

Si X est une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors :

$$E(X) = p,\ V(X) = p(1-p) \text{ et } G_X(t) = 1 - p + p \cdot t.$$

Démonstration.

- $E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i \times p_i = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = p.$
- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 \times p_i - p^2 = p - p^2.$
- $G_X(t) = \sum_{n \geq 0} p_n \cdot t^n = p_0 \cdot t^0 + p_1 \cdot t^1 = 1 - p + p \cdot t.$

□

7.3. Loi binomiale :

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire a valeurs dans $\mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. X est dite suit la loi binômiale de paramètre n et p si :

- $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
- $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(X = k) = C_n^k p^k \times (1 - p)^{n-k}$.

On note $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.

7.3. Loi binomiale :

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire a valeurs dans $\mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. X est dite suit la loi binômiale de paramètre n et p si :

- $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
- $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(X = k) = C_n^k p^k \times (1 - p)^{n-k}$.

On note $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.

La loi binômiale permet de calculer la probabilité d'obtenir k succès parmi n épreuves indépendantes (avec remise).

Propriété

Si X est une variable aléatoire suit une loi binômiale de paramètre n et p, alors :

$$E(X) = np,\ V(X) = np(1-p) \text{ et } G_X(t) = (1 - p + p \cdot t)^n.$$

Démonstration.

- $$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} x_k \times p_k = \sum_{k=0}^{n} k \times C_n^k p^k \times (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n \times C_{n-1}^{k-1} p^k \times (1-p)^{n-k} \\ &= np \times \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} \times (1-p)^{n-1-(k-1)} \\ &= np \end{aligned}$$

□

• On sait que $E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$ et on a :

$$
\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{n} x_k(x_k-1) \times p_k = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \times C_n^k p^k \times (1-p)^{n-k} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} p^{k-2} \times (1-p)^{n-2-(k-2)} \\
&= n(n-1)p^2 \times \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^{i} p^{i} \times (1-p)^{n-2-i} \\
&= n(n-1)p^2 (p+1-p)^{n-2} = n(n-1)p^2
\end{aligned}
$$

on en déduit alors que $E(X^2) = n(n-1)p^2 + np$, puis
$V(X) = n^2p^2 + np(1-p) - n^2p^2 = np(1-p)$.

- $$\begin{aligned} G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} p_k \cdot t^k &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot t^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (p \cdot t)^k \cdot (1-p)^{n-k} \\ &= (1 - p + p \cdot t)^n \end{aligned}$$

Propriété

Si $X_1, X_2, ..., X_m$ sont des variables aléatoires indépendantes tels que $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1; p)$, $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2; p)$,..., $X_m \sim \mathcal{B}(n_m; p)$ alors :

$$\sum_{i=1}^{m} X_i \sim \mathcal{B}(\sum_{i=1}^{m} n_i; p).$$

En particulier, Ssi $X_1, X_2, ..., X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p ; alors leur somme X suit une loi binomiale de paramètre n et p.

Remarque

- *Lorsque n est grand le calcul de la loi binomiale devient délicat ; on peut utiliser des approximations avec d'autres lois.*
- *L'expression de la loi binomiale est le terme genéral des coéfficients du binome de Newton, d'ou le nom de loi binomiale.*

Application:

La probabilité qu'un tireur atteigne sa cible est $p = \frac{2}{3}$*. On suppose qu'il effectue* n *tirs* $(n \geq 1)$*.*
Soit X *la variable aléatoire qui représente le nombre de succés obtenus.*
On note A *l'evénement : "obtenir au moins un succés".*

1. *Calculer* $\mathbb{P}(A)$*.*
2. *Combien de tirs faut-il effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins un succés soit supérieure à* 0.9*.*
3. *On suppose* $n = 20$*. Calculer l'espérance et la variance de* X*.*

7.4. Loi hypergéométrique :
on considère une urne contenant N boules (indiscernables au touché) dont N_R des boules rouges et donc en proportion $p = \frac{N_R}{N}$. On tire simultanément et sans remise n boules ($n \leq N$), et on appelle X **la v.a.r. égale au nombre de boules rouges obtenues**.
Noté que les tirages que ce soit simultanés ou successifs sont ici dépendants puisque la composition de l'urne est différente après chaque tirage, dépendant des tirages précédents.
On note U l'ensemble des boules de l'urne. Ainsi, l'expérience est modélisée par :
$\Omega = \{A \in \mathcal{P}(U)/card(A) = n\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme.

• **Valeurs de** X : Soit k le nombre des boules rouges obtenue parmis les n boules tirées. Il faut bien entendu que $k \leq N_R$ (nombre total de boules rouges) et $n - k \leq N - N_R$ (nombre de boules $\overline{R}$) d'où les conditions :

$$max\{0, n - (N - N_R)\} \leq k \leq min\{n, N_R\}.$$

II. Variables aléatoires discrètes (réelle)
7. Lois usuelles discrètes

• **Poids de probabilié** : Pour $k \in X(\Omega)$, on a : $P(X=k) = \frac{card(X=k)}{card(\Omega)}$.
Or $card(\Omega) = C_N^n$ (nombre de parties à n éléments d'un ensemble de cardinal N) et $card(X=k) = C_{N_R}^k \times C_{N-N_R}^{n-k}$ (nombre de parties contenant k boules rouges prises parmi N_R boules rouges multiplié par le nombre de parties contenant $n-k$ boules $\overline{R}$ prises parmi $N-N_R$ boules $\overline{R}$).
Alors,

$$P(X=k) = \frac{C_{N_R}^k \times C_{N-N_R}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{C_{N \cdot p}^k \times C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n}.$$

• **Poids de probabilié** : Pour $k \in X(\Omega)$, on a : $P(X=k) = \frac{card(X=k)}{card(\Omega)}$.
Or $card(\Omega) = C_N^n$ (nombre de parties à n éléments d'un ensemble de cardinal N) et $card(X=k) = C_{N_R}^k \times C_{N-N_R}^{n-k}$ (nombre de parties contenant k boules rouges prises parmi N_R boules rouges multiplié par le nombre de parties contenant $n-k$ boules $\overline{R}$ prises parmi $N-N_R$ boules $\overline{R}$).
Alors,

$$P(X=k) = \frac{C_{N_R}^k \times C_{N-N_R}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{C_{N\cdot p}^k \times C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité ($\sum_{k\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=k)=1$), on utilise la formule de Vandermonde

$$\boxed{\sum_{k=0}^m C_r^k \times C_s^{m-k} = C_{r+s}^m}.$$

Définition

Soit $(n, N) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leq N$ et soit $p \in]0, 1[$ tel que $N \cdot p \in \mathbb{N}$. Une variable aléatoire X est dite suit la loi hypergéométrique de paramètres $(N; n; p)$ si :

- $X(\Omega) = [\![max\{0, n - N(1-p)\}, min\{n, N \cdot p\}]\!]$.
- $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{C_{N \cdot p}^{k} \times C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n}$.

On note $X \sim \mathcal{H}(N; n; p)$.

Remarque

Si le tirage (la choix) se fait successivement et avec remise alors dans ce cas on a :

$$\forall k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = k) = C_n^k \times \frac{N_R^k \cdot (N - N_R)^{n-k}}{N^n}.$$

Remarque

Si le tirage (la choix) se fait successivement et avec remise alors dans ce cas on a :

$$\forall k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = k) = C_n^k \times \frac{N_R^k \cdot (N - N_R)^{n-k}}{N^n}.$$

Propriété

Soit $X \sim \mathcal{H}(N; n; p)$. Alors :

$$E(X) = np, \text{ et } V(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p).$$

Application:

Un joueur coche une grille de loto (il choisit 6 numéros parmi 49). Parmi les 49 numéros, on a 6 numéros gagnants (succés) et 43 numéros non gagnants.

1. *Calculer la probabilité qu'a le joueur pour obtenir k numéros gagnants,* $(k \in \{0, ..., 6\})$.
2. *En moyenne, combien de numéros gagnants obtient-on en jouant une grille de loto ?*

7.5. Loi géométrique ou de Pascal :

On considère une expérience aléatoire modélisée par $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on s'intéresse à un événement A appelé «succès» et on note $p = \mathbb{P}(A)$.
On répète une infinité de fois cette expérience aléatoire de manière « indépendante » (avec remise). Ainsi, la nouvelle expérience sera modélisée par $(\Omega^{\mathbb{N}}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$.
On considère la variable aléatoire X qui prend pour valeur le rang d'apparition du premier succès obtenus au cours de cette nouvelle expérience.

La loi de X :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- À chaque épreuve est associé l'ensemble fondamental $\Omega = \{A, \overline{A}\}$ et l'événement $\{X = k\}$ pour $k \in N^*$ est représenté par une suite de $k-1$ événements $\overline{A}$, terminée par l'événement A :

$$\underbrace{\overline{A}, \overline{A}, ..., \overline{A}}_{k-1}, A$$

Ainsi, la probabilité de cet événement est

$$\tilde{\mathbb{P}}(X = k) = (1-p)^{k-1}p.$$

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité ($\sum_{k\in X(\Omega)} \widetilde{\mathbb{P}}(X = k) = 1$), il suffit d'utiliser la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.

Définition

Soit $p \in]0;1]$. X suit la loi géométrique de paramètre p si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- $\forall k \in X(\Omega),\ P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$.

On note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Définition

Soit $p \in]0;1]$. X suit la loi géométrique de paramètre p si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- $\forall k \in X(\Omega),\ P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$.

On note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Proposition

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p, alors :

- $\forall t \in]-\frac{1}{1-p}; \frac{1}{1+p}[$ on a $G_X(t) = \frac{p \cdot t}{1-(1-p)\cdot t}$
- $E(X) = \frac{1}{p}$
- $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Démonstration.

• $\forall t$ tel que $|(1-p)t| < 1$ on a

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} t^k = tp \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k t^k = \frac{pt}{1-(1-p)t}$$

• On a $G_X'(t) = \frac{p}{(1-t-p\cdot t)^2}$ et donc $E(X) = G_X'(1) = \frac{1}{p}$

• On a $G_X''(t) = \left(\frac{p}{(1-t-p\cdot t)^2}\right)' = \frac{2p\cdot(1-p)}{(1-(1-p)\cdot t)^3}$, par ailleur

$$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X''(1))^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

□

Application:

Une urne contient 5 boules blanches et 10 boules noires. On tire des boules au hasard et avec remise jusqu'à ce qu'on obtienne la première boule blanche (succès). Quelle est la probabilité que la première boule blanche soit tirée aprés 4 tirages ?

7.6. Loi de Poisson :

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire a valeurs dans $\mathbb{N}$.

Nous dirons que X est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ (X suit la loi de Poisson) si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

7.6. Loi de Poisson :

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire a valeurs dans $\mathbb{N}$.
Nous dirons que X est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ (X suit la loi de Poisson) si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Propriété

Si X est une variable aléatoire suit la loi Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors :

$$E(X) = \lambda, \ V(X) = \lambda \text{ et } G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}.$$

Démonstration.

- $$\begin{aligned} E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \times \lambda \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \times \lambda \times e^{\lambda} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

$\square$

- On a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ et puisque

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+2}}{k!} = e^{-\lambda} \times \lambda^2 \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \times \lambda^2 \times e^{\lambda} = \lambda^2 \end{aligned}$$

alors, $E(X^2) = \lambda^2 + E(X) = \lambda^2 + \lambda$ et donc $V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

- On a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ et puisque

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+2}}{k!} = e^{-\lambda} \times \lambda^2 \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \times \lambda^2 \times e^{\lambda} = \lambda^2 \end{aligned}$$

alors, $E(X^2) = \lambda^2 + E(X) = \lambda^2 + \lambda$ et donc $V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

- On a $G_X(t) = \sum_{n \geq 0} p_n \times t^n = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times t^n = e^{-\lambda} \times e^{\lambda \cdot t} = e^{\lambda(t-1)}$.

Application:

Admettons que le nombre d'erreurs X par page d'un livre suive une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0,5$. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une erreur dans une page donnée.

Exercice

Déterminer la fonction de répartition pour chaqu'une des lois suivantes : Loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique et la loi de Poisson.

III. Variables aléatoires continues (réelle)

On rappelle qu'une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu borilienne.

III. Variables aléatoires continues (réelle)

On rappelle qu'une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu borilienne.

Exemple

1. *La durée de vie d'un individu est représentée par une variable aléatoire réelle.*
2. *La durée de jeu réel d'un joueur dans un matche de foot est représentée par une variable aléatoire réelle.*

Définition

Une variable aléatoire réelle X est dit continue, si sa fonction de répartition F_X est continue en tout poit, ce qui est équivalent à dire que $\mathbb{P}(X = x) = 0$ pour tout x.

Définition

Une variable aléatoire réelle X est dit continue, si sa fonction de répartition F_X est continue en tout poit, ce qui est équivalent à dire que $\mathbb{P}(X = x) = 0$ pour tout x.

Une classe importante des variables aléatoire réelles continues est la classe des variables aléatoire de loi à densité.

Définition

On appelle densité de probabilité (ou densité), toute fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ qui est positive, intégrable ($\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx$ est fine) et de densité totale égale 1 ($\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$).

Définition

On appelle densité de probabilité (ou densité), toute fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ qui est positive, intégrable ($\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx$ est fine) et de densité totale égale 1 ($\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$).

Si f est une densité de probabilité, alors la fonction F définie par $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ est une fonction croissante, continue à droite en tout point et vérifie $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 1$. C'est donc la fonction de répartition d'une probabilité.

Définition

Une variable aléatoire réelle X est dite de densité f (de loi à densité f), si pour tout réel x on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Définition

Une variable aléatoire réelle X est dite de densité f (de loi à densité f), si pour tout réel x on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Remarque

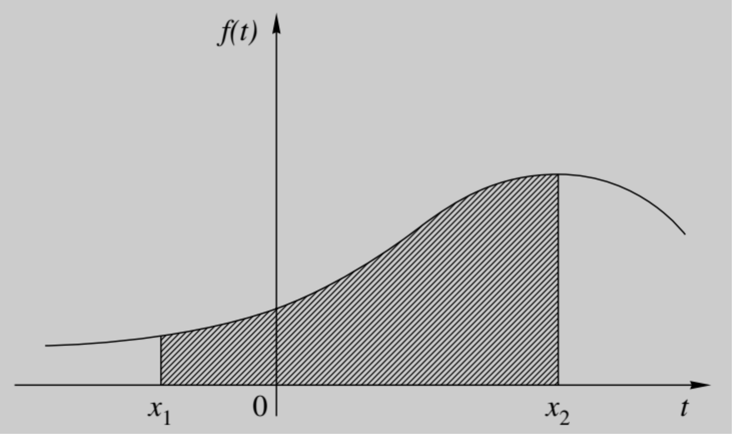
f n'est pas unique. Il suffit de la modifier en un point, et on obtient une autre fonction vérifiant toutes les conditions de la définition (modifier une fonction en un point ne change pas la valeur de l'intégrale).

Proposition

Soient X une variable aléatoire réelle de loi $\mathbb{P}_X$ de densité f. Alors, la probabilité d'un intervalle s'obtient en intégrant la densité sur cet intervalle :

$$\mathbb{P}(X \in [x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt.$$

1. Variables aléatoires à densité



Remarque

pour une variable aléatoire à densité, la valeur de la probabilité ne change pas selon que l'on met des inégalités strictes ou larges :

$$\mathbb{P}(X \in [x_1, x_2]) = \mathbb{P}(X \in]x_1, x_2]) = \mathbb{P}(X \in [x_1, x_2[) = \mathbb{P}(X \in]x_1, x_2[)$$

En effet, $\forall x \in \mathbb{R}, P(X = x) = \lim_{t \longrightarrow x^+} F_X(t) - F_X(x) = 0$, *et donc par exemple :*

$$\mathbb{P}(X \in]x_1, x_2]) = \mathbb{P}(X \in [x_1, x_2]) - \mathbb{P}(X = x_1) = \mathbb{P}(X \in [x_1, x_2]).$$

Corollaire

Soient X une variable aléatoire réelle de loi $\mathbb{P}_X$ de densité f. Alors, la fonction de répartition F_X de X est continue.

Corollaire

Soient X une variable aléatoire réelle de loi $\mathbb{P}_X$ de densité f. Alors, la fonction de répartition F_X de X est continue.

Proposition

Soient X une variable aléatoire réelle de loi $\mathbb{P}_X$ de densité f. Alors, en tout point α où f est continue, F_X est dérivable et on a :

$$F_X'(\alpha) = f(\alpha).$$

Démonstration.

Soit α un point où f est continue. Alors, on a :

$$\forall\epsilon > 0, \exists\eta > 0, |x-\alpha| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(\alpha)| \leq \epsilon.$$

Soient $\epsilon > 0$ fixé, et h tel que $|h| < \eta$. On remarquons que $f(\alpha) = \frac{1}{h}\int_\alpha^{\alpha+h} f(\alpha)dt$ on a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{F_X(\alpha+h) - F_X(\alpha)}{h} - f(\alpha)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_\alpha^{\alpha+h}(f(t) - f(\alpha))dt\right| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_\alpha^{\alpha+h}|f(t) - f(\alpha)|dt \leq \frac{1}{h}h\epsilon = \epsilon.\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\frac{F_X(\alpha+h) - F_X(\alpha)}{h} = f(\alpha)$. □

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \leq 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{t}} & si\ 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2t^2} & si\ 1 \leq t \end{cases}$$

La fonction f est positive et intégrable sur $\mathbb{R}$ (car elle admet un nombre fini de points de discontinuités), de plus $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$. En effet :

- $\int_0^1 f(t)dt = \lim_{x \longrightarrow 0} \int_x^1 \frac{1}{4\sqrt{t}}dt = \lim_{x \longrightarrow 0} \left[\frac{1}{2}\sqrt{t}\right]_x^1 = \frac{1}{2}$
- $\int_1^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{2t^2}dt = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{2t}\right]_1^x = \frac{1}{2}$

Donc, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

- $\int_0^1 f(t)dt = \lim_{x \longrightarrow 0} \int_x^1 \frac{1}{4\sqrt{t}} dt = \lim_{x \longrightarrow 0} \left[\frac{1}{2}\sqrt{t}\right]_x^1 = \frac{1}{2}$
- $\int_1^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{2t^2} dt = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{2t}\right]_1^x = \frac{1}{2}$

Donc, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.
Ainsi, f est la densité d'une variable aléatoire X dont la fonction de répartition soit :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2x} & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Inversement, on a la proposition suivante.

Proposition

Soient X une variable aléatoire réelle et F_X sa fonction de répartition. Si la fonction F_X est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors X admet la densité de probabilité f définie par $f(x) = F'(x)$.

Définition

Soit X une variable aléatoire à densité f satisfaisant $\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|dx < \infty$. On appelle espérance de X le réel :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx.$$

Définition

Soit X une variable aléatoire à densité f satisfaisant $\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|dx < \infty$. On appelle espérance de X le réel :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx.$$

Exemple

1) Soit X une variable aléatoire de densité f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\ln(2)} \times \frac{1}{t^2 + t} \times 1_{[1,+\infty[}.$$

On peut vérifier facilement que f est une densité, et puisque $xf(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(2) \cdot x}$ alors la variable aléatoire X ne possède pas d'espérance.

2) Soit Y la variable aléatoire de densité g définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \frac{2}{t^3} \times 1_{[1,+\infty[}.$$

Puisque $tg(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{t^2}$ alors la variable aléatoire Y admet une espérance $E(Y)$, et on a :

$$\begin{aligned} E(Y) = \int_1^{+\infty} tg(t)dt &= 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt = 2 \cdot \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2}dt \\ &= 2 \cdot \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{t}\right]_1^x = 2 \end{aligned}$$

2. Moment d'une variables aléatoires à densité

Pour l'espérance d'une variable aléatoire réelle à densité, on a les mêmes propriétés que dans le cas discret, mais elles sont délicates à démontrer sans faire appel à la théorie de la mesure ($E(X) = \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$). Par contre, on n'a plus de structure d'espace vectoriel : la somme de deux variables à densité n'est pas nécessairement une variable à densité (considérer $X - X$ par exemple). On annonce donc sans démonstration les résultats suivants :

Propriété

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à densité admettant une espérance, et soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $X + aY$ admet une espérance, et on a

$$E(X + aY) = E(X) + aE(Y).$$

Propriété

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à densité admettant une espérance, et soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $X + aY$ admet une espérance, et on a

$$E(X + aY) = E(X) + aE(Y).$$

Théorème : ≪ *Théorème de transfert*≫

Soient X une variable aléatoire réelle à densité f, et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\int_{\mathbb{R}} |g(x)| \times f(x)dx < \infty$. Alors $g(X)$ possède une espérance, et on a

$$E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \times f(x)dx.$$

Pour la variance et le moment d'ordre 2, on a :

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle à densité f. On appelle moment d'ordre 2 l'espérance, si elle existe, de la variable aléatoire X^2. C'est donc le réel

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \times f(x)dx.$$

Pour la variance et le moment d'ordre 2, on a :

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle à densité f. On appelle moment d'ordre 2 l'espérance, si elle existe, de la variable aléatoire X^2. C'est donc le réel

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \times f(x)dx.$$

Propriété

Si X est une variable aléatoire réelle à densité f et possède un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance.

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle à densité f. On appelle variance de X l'espérance,si elle existe, de la variable aléatoire $(X - E(X))^2$. C'est donc le réel

$$Var(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - E(X))^2 \times f(x)dx.$$

Nous avons évidemment encore

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

III. Variables aléatoires continues (réelle)
2. Moment d'une variables aléatoires à densité

Les définitions suivantes permettent de caractériser l'asymétrie d'une loi de probabilité (distribution de probabilité).

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle à densité f.

- On appelle moment non centré d'ordre $p \in \mathbb{N}*$ de X, la quantité, lorsqu'elle existe :

$$m_p(X) = E(X^p) = \int_{\mathbb{R}} x^p \times f(x)dx.$$

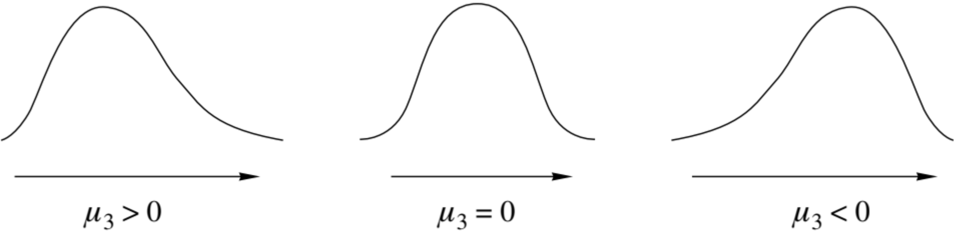
- On appelle moment centré d'ordre $p \in \mathbb{N}*$ de X, la quantité, lorsqu'elle existe :

$$\mu_p(X) = E((X - E(X))^p = \int_{\mathbb{R}} ((x - E(X))^p \times f(x)dx.$$

III. Variables aléatoires continues (réelle)
2. Moment d'une variables aléatoires à densité

L'asymétrie d'une distribution peut se caractériser par le moment centré d'ordre trois. En effet, la distribution est :

- si $\mu_3(X) = 0$, alors la distribution de X est symétrique ;
- si $\mu_3(X) > 0$, alors la distribution de X est dissymétrique étalée vers la droite ;
- si $\mu_3(X) < 0$, alors la distribution de X est dissymétrique étalée vers la gauche.



3.1. Loi uniforme

Définition

La variable aléatoire réelle X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ si elle a une densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases}$$

On note $X \sim \mathcal{U}([a, b])$.

3.1. Loi uniforme

Propriété

Si X est une variable aléatoire suit la loi uniforme continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors sa fonction de répartition est la fonction définie par :

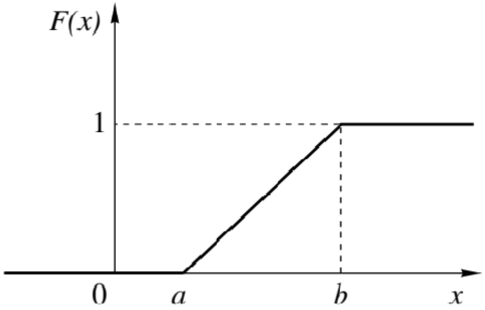
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

ainsi que son espérance et sa variance :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Démonstration.

- Déterminons la fonction de répartition de X :
  - si $x < a$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.
  - si $a \leq x \leq b$:
    $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dt = \frac{x-a}{b-a}$.
  - si $x > b$:
    $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dt + \int_{b}^{x} 0dt = 1$.



□

- Calculons l'espérance :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{b+a}{2}.$$

- Calculons l'espérance :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{b+a}{2}.$$

- Calculons maintenant la variance : On a

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

ainsi, $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

3.1. Loi uniforme

Application:

On remplit un verre de volume 20 cl d'une quantité aléatoire d'eau choisie uniformément entre 0 et 20 cl :

1. *quelle est la probabilité d'obtenir moins de 5 cl d'eau ?*
2. *on vide 5 verres ainsi remplis dans une très grande bassine. Quelle quantité moyenne d'eau obtient-on dans la bassine ?*

3.2. Loi exponentielle

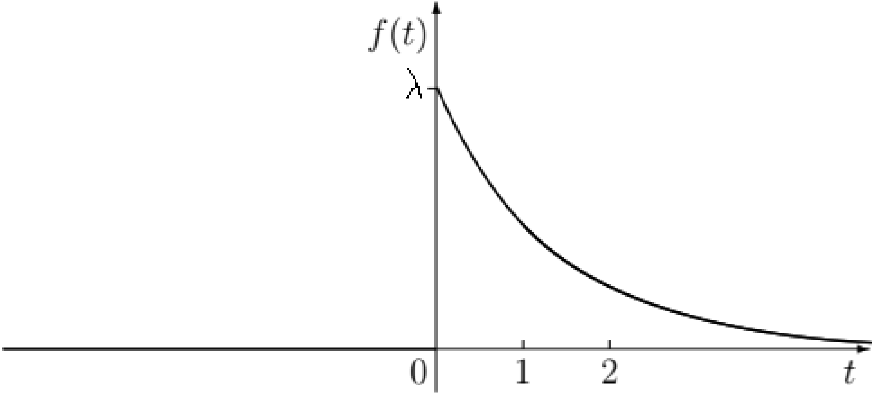
Définition

Soit $\lambda > 0$. X suit la loi exponentielle de paramètre λ si elle a pour densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

3.2. Loi exponentielle



3.2. Loi exponentielle

Propriété

Si X est une variable aléatoire suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors sa fonction de répartition est la fonction définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

ainsi que son espérance et sa variance (à l'aide d'intégration par parties) :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3.2. Loi exponentielle

En pratique, plutôt que de travailler avec la fonction de répartition d'une loi exponentielle, il est plus commode d'utiliser la fonction de survie G définie par :

$$G(X) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3.2. Loi exponentielle

En pratique, plutôt que de travailler avec la fonction de répartition d'une loi exponentielle, il est plus commode d'utiliser la fonction de survie G définie par :

$$G(X) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Les lois exponentielles sont souvent utilisés pour modéliser une durée de vie ou le temps d'attente avant l'arrivée d'un événement spécifique. Par exemple, temps d'attente à partir de maintenant du prochain tremblement de terre, du prochain faux numéro sur une ligne téléphonique, la durée de vie d'une bactérie...

3.2. Loi exponentielle

Application:

Supposons que la durée de vie d'une conversation téléphonique mesurée en minutes soit une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda = 0,1$. Vous arrivez à une cabine téléphonique et quelqu'un entre juste devant vous.

1. *Avec quelle probabilité devez-vous attendre plus de 10 minutes ?*
2. *Avec quelle probabilité devez-vous attendre entre 10 et 20 minutes ?*

3.2. Loi exponentielle

Propriété

Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors

$$\forall s \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \mathbb{P}(X > s + t / X > t) = \mathbb{P}(X > s).$$

De plus, cette propriété caractérise la loi exponentielle.

Démonstration.

Soit $G(t) = \mathbb{P}(X > t) = 1 - F_X(t)$ la fonction de survie de X. D'après la formule des probabilités conditionnelles, la propriété de l'énoncé équivaut à dire que $G(t+s) = G(t)G(s)$ pour tous $s, t > 0$. Comme G est décroissante et continue à droite et tend vers 0 à l'infini, cela revient aussi à dire que la solution de la dernière équation fonctionnelle est une exponentielle négative, de la forme $G(t) = e^{-\lambda \cdot t}$ pour un $\lambda > 0$. La caractérization demandée s'obtient en utilisant le fait qu'une fonction de répartition caractérise la loi à laquelle elle est associée et la définition d'une loi exponentielle. $\square$

3.3. Loi normale ou de Laplace-Gauss

Définition

X suit la loi normale centrée réduite si elle a pour densité f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On note $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$.

3.3. Loi normale ou de Laplace-Gauss

Propriété

Si $X \sim \mathcal{N}(0;1)$, alors

$$E(X) = 0 \quad \text{et} \quad V(X) = 1.$$

3.3. Loi normale ou de Laplace-Gauss

Propriété

Si $X \sim \mathcal{N}(0;1)$, alors

$$E(X) = 0 \quad \text{et} \quad V(X) = 1.$$

Démonstration.

- L'existence de $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ est assurée par le fait que la fonction $x \mapsto xf(x)$ est continue et qu'en l'infini, $xf(x) = o(\frac{1}{x^2})$. Comme elle est impaire, on a bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.$$

• Pour la variance, l'existence de $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ est assurée pour la même raison que l'espérance et le calcul se fait en intégrant par parties. En effet

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(0+\sqrt{2\pi}\right) = 1\end{aligned}$$

• Pour la variance, l'existence de $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ est assurée pour la même raison que l'espérance et le calcul se fait en intégrant par parties. En effet

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[-xe^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(0 + \sqrt{2\pi} \right) = 1\end{aligned}$$

La fonction de répartition n'a pas d'expression «**explicite**» à l'aide des fonctions usuelles. Elle est donnée sous la forme d'une table fournie dans la page suivante, où sont rassemblées des valeurs approchées de $\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ avec une précision de 10^{-4}.

Loi normale centrée réduite

	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952

3.3. Loi normale ou de Laplace-Gauss

Définition

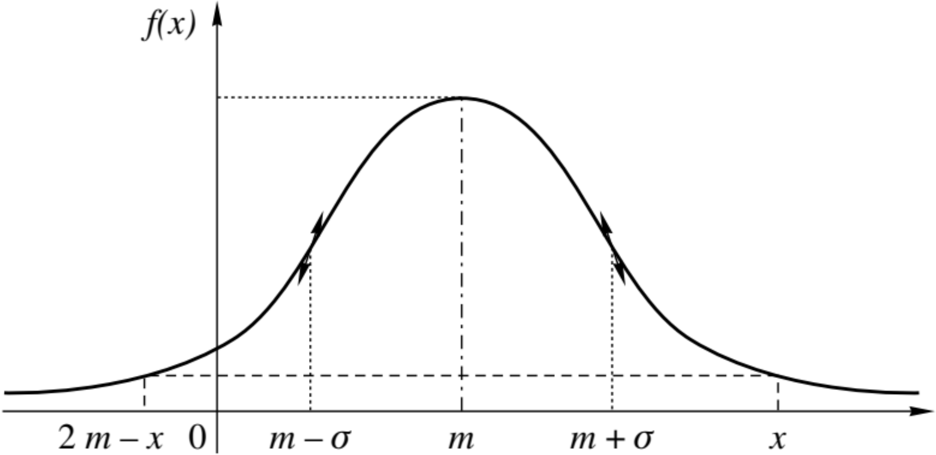
Soient $m \in \mathbb{R}$ ei $\sigma > 0$. La variable aléatoire X suit la loi normale de paramètre m et σ si elle a pour densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

On note $X \sim \mathcal{N}(m; \sigma)$.

Remarque

1. *On peut constater que* $f(2m - x) = f(x)$*, ce qui indique que le graphe de* f *est symétrique par rapport à la droite verticale* $x = m$*.*
2. *L'expression* $(x - m)^2$ *est minimum pour* $x = m$*, ce qui va correspondre à un maximum pour* f *de valeur :*
$$f(m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$
3. *On a* $f''(x) = \frac{(m-x-\sigma)(m-x+\sigma)\cdot f(x)}{\sigma^4}$*,*
donc f'' *s'annule en changeant de signe pour* $x = m - \sigma$ *et* $x = m + \sigma$*, ce qui correspond à deux points d'inflexion pour le graphe de* f*.*
4. *Enfin, quand* x *devient infini, alors* $f(x)$ *tend vers* 0 *et donc l'axe des abscisses est asymptote au graphe.*


f(x)
2 m − x
0
m − σ
m
m + σ
x

Pour des valeurs particulières, on trouve

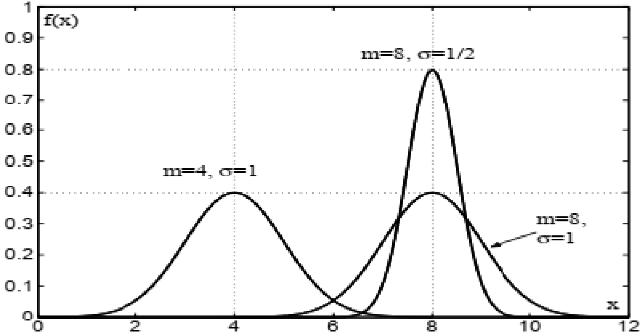


Figure: Densité de probabilité de la loi normale pour différentes valeurs de m et σ

Propriété

Si X est une variable aléatoire continue, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a :

1. $\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(X > a) = 1 - \mathbb{P}(X \leq a) = 1 - F_X(a)$.
2. $F_X(-a) = 1 - F_X(a)$, car la fonction de répartition est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = m$; c.a.d $\mathbb{P}(X < -a) = \mathbb{P}(X > a)$.
3. Si $a > 0$, alors $\mathbb{P}(|X| < a) = 2F_X(a) - 1$.

Grâce à la propriété suivante, on peut toujour se ramèner à la loi normale centrée réduite :

Propriété

Soit X une variable aléatoire, alors

$$X \sim \mathcal{N}(m;\sigma) \Longleftrightarrow \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0;1).$$

Démonstration.

Si $X \sim \mathcal{N}(m;\sigma)$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a :

$$\mathbb{P}(\frac{X-m}{\sigma} \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \sigma y - m) = \int_{-\infty}^{\sigma y - m} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

En faisant le changement de variable $t = \frac{x-m}{\sigma}$ nous obtenons

$$\mathbb{P}(\frac{X-m}{\sigma} \leq y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

La variable aléatoire $\frac{X-m}{\sigma}$ a pour densité $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, ainsi $\frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0;1)$. □

Propriété

Soit X une variable aléatoire, telle que $X \sim \mathcal{N}(m; \sigma)$. Alors

$$E(X) = m \quad V(X) = \sigma^2.$$

Propriété

Soit X une variable aléatoire, telle que $X \sim \mathcal{N}(m;\sigma)$. Alors

$$E(X) = m \quad V(X) = \sigma^2.$$

Démonstration.

On a $X \sim \mathcal{N}(m;\sigma) \Longrightarrow \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0;1)$ et donc

$$E(\frac{X-m}{\sigma}) = 0 \quad \text{et } V(\frac{X-m}{\sigma}) = 1$$

ce qui entraine que

$$E(X-m) = 0 \quad \text{et } \frac{1}{\sigma^2}V(X-m) = 1$$

et par suite

$$E(X) = m \quad \text{et } V(X) = V(X-m) = \sigma^2.$$

□

Application:

D'après une étude récente, la taille des femmes marocaines est distribuée selon une loi normale de moyenne $m = 1,58$ *et d'écart-type* $\sigma = 0,06$. *Pour produire un stock de vêtements, un fabricant souhaite utiliser cette loi.*

1. *Il commence par déterminer un intervalle de la forme* $[m - a; m + a]$ *(donc symétrique autour de la moyenne) contenant en moyenne* 90% *(environ) des tailles des femmes marocaines. Calculer* a.
2. *Il en déduit trois tailles, S, M et L, correspondant respectivement aux intervalles* $\left[m - a; \frac{m-a}{3}\right]$, $\left[\frac{m-a}{3}; \frac{m+a}{3}\right]$ *et* $\left[\frac{m+a}{3}; m + a\right]$. *Calculer le pourcentage de la production qui doit être affecté à chaque taille.*

Solution :

1) Soit T la variable aléatoire représentant la taille d'une femme. Par hypothèse, T suit une loi normale $\mathcal{N}(1,58;0,062)$. On cherche $a>0$ tel que

$$\mathbb{P}\left(T \in [m-a;m+a]\right) = 0,9.$$

Soit la variable $Y = \frac{T-m}{\sigma}$. On sait que Y suit une loi normale standard $\mathcal{N}(0;1)$. De plus, on a

$$\begin{array}{rcl} m-a & \leq & T \leq m+a \\ -\dfrac{a}{\sigma} & \leq & \dfrac{T-m}{\sigma} \leq \dfrac{a}{\sigma}. \end{array}$$

Donc, $\mathbb{P}\left(T \in [m-a;m+a]\right) = 0,9 \Longleftrightarrow \mathbb{P}\left(T \in \left[-\frac{a}{\sigma};\frac{a}{\sigma}\right]\right) = 0,9$.
Cherchons donc λ tel que $\mathbb{P}(Y \in [-\lambda;\lambda]) = 0,9$.

On sait que

$$\mathbb{P}(Y \in [-\lambda; \lambda]) = F_Y(\lambda) - F_Y(-\lambda)$$

car Y est une variable aléatoire continue. De plus, par symétrie de la loi normale standard, on a $F_Y(-\lambda) = 1 - F_Y(\lambda)$, et ainsi

$$\mathbb{P}(Y \in [-\lambda; \lambda]) = 2F_Y(\lambda) - 1.$$

De ce fait, chercher λ tel que $\mathbb{P}(Y \in [-\lambda; \lambda]) = 0,9$ est équivalent à chercher λ tel que $F_Y(\lambda) = \frac{1+0,9}{2} = 0,95$.
La lecture de la table de la loi normale donne : $F_Y(1,64) = 0,9495$ et $F_Y(1,65) = 0,9505$.
Pour avoir un intervalle légèrement plus grand que celui recherché par le fabricant, on choisit $\lambda = 1,65$. Si on pose $a = \sigma \cdot \lambda = 0,06 \times 1,65 = 0,099$, on a donc

$$\mathbb{P}\left(T \in [m-a; m+a]\right) = \mathbb{P}\left(T \in [1,481; 1,679]\right) \simeq 0,9.$$

2) Étudions le premier intervalle. On a

$$\begin{aligned} m-a &\leq T \leq m-\frac{a}{3} \\ -a &\leq T-m \leq -\frac{a}{3} \\ -\frac{a}{\sigma} &\leq \frac{T-m}{\sigma} \leq \frac{a}{3\sigma} \\ -\lambda &\leq Y \leq -\frac{\lambda}{3}. \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(T \in [m-a; m-\frac{a}{3}]\right) &= \mathbb{P}\left(Y \in [-\lambda; -\frac{\lambda}{3}]\right) \\ &= F_Y(-\frac{\lambda}{3}) - F_Y(-\lambda) \\ &= 1 - F_Y(\frac{\lambda}{3}) - 1 + F_Y(\lambda) \\ &= 0,9505 - F_Y\left(\frac{1,65}{3}\right) \\ &= 0,9505 - 0,7088 = 0,2417 \end{aligned}$$

On a de la même façon

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T \in [m - \frac{a}{3}; m + \frac{a}{3}]\right) &= \mathbb{P}\left(Y \in [-\frac{\lambda}{3}; \frac{\lambda}{3}]\right) \\
&= F_Y(\frac{\lambda}{3}) - F_Y(-\frac{\lambda}{3}) \\
&= 2F_Y(\frac{\lambda}{3}) - 1 \\
&= 2 \times 0,7088 - 1 \\
&= 0,4176.
\end{aligned}$$

On a de la même façon

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T \in [m - \frac{a}{3}; m + \frac{a}{3}]\right) &= \mathbb{P}\left(Y \in [-\frac{\lambda}{3}; \frac{\lambda}{3}]\right) \\
&= F_Y(\frac{\lambda}{3}) - F_Y(-\frac{\lambda}{3}) \\
&= 2F_Y(\frac{\lambda}{3}) - 1 \\
&= 2 \times 0,7088 - 1 \\
&= 0,4176.
\end{aligned}$$

Et enfin

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T \in [m + \frac{a}{3}; m + a]\right) &= \mathbb{P}\left(Y \in [\frac{\lambda}{3}; \lambda]\right) \\
&= F_Y(\lambda) - F_Y(\frac{\lambda}{3}) \\
&= 0,9505 - 0,7088 \\
&= 0,2417.
\end{aligned}$$

ce dernier résultat étant évident par symétrie de la loi normale.

On calcule enfin les pourcentages à partir de ces probabilités. La production totale correspond à 90% de la population et on doit donc diviser les probabilités obtenues par cette valeur. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\text{pourcentage de } S &= \frac{0,2417}{0,90} \simeq 27\% \\
\text{pourcentage de } M &= \frac{0,4176}{0,90} \simeq 46\% \\
\text{pourcentage de } L &= \frac{0,2417}{0,90} \simeq 27\%.
\end{aligned}$$